

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

« *La mondialisation est la version la plus récente de la domination occidentale* », Sophie Bessis, *L'Occident et les autres*, La Découverte, 2001. Cette affirmation vous paraît-elle vraie ?

Vous illustrerez votre point de vue. Sophie Bessis est une historienne franco-tunisienne.

**Sujet n° 2**

Selon vous, la diversité culturelle menace-t-elle l'unité nationale ?

**Sujet n° 3**

A propos des célébrations des cinquantièmes des indépendances africaines, que pensez-vous de ce point de vue d'Achille Mbembe, universitaire camerounais, professeur d'histoire et de science politique à l'université de Johannesburg.

« *De mon point de vue, il n'y a strictement rien à célébrer. [ ]. On ne trompera personne en vêtant de haillons ce qui manifestement est nu* ».

Extrait d'un entretien avec Norbert N. Ouendji dans *Africultures*. Vous discuterez cette appréciation.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE  
APPLIQUÉE  
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE  
APPLIQUÉE  
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE  
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE  
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Les résultats seront encadrés**

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants. Le problème est constitué de cinq parties dépendantes. Toutefois, les résultats non démontrés d'une partie pourront être utilisés dans les questions suivantes.

### **EXERCICE**

Soit  $D_n$  le déterminant d'ordre  $n$  de terme général  $d_{i,j}$  défini par  $d_{i,i} = u + v$ ,  $d_{i,i+1} = uv$ ,  $d_{i+1,i} = 1$ , et  $d_{i,j} = 0$  sinon, où  $u$  et  $v$  sont deux nombres réels.

1. Etablir une relation de récurrence entre  $D_n$ ,  $D_{n-1}$  et  $D_{n-2}$  pour  $n \geq 3$ .
2. En déduire  $D_n$ .

### **PROBLÈME**

#### **Partie 0**

Les résultats de cette partie seront utiles pour la suite.

1. Montrer que la fonction logarithme népérien est concave.
2. Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$  réels strictement positifs. Soit  $m_a$  leur moyenne arithmétique et  $m_g$  leur moyenne géométrique. On rappelle que

$$m_g = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Montrer que  $m_g \leq m_a$ .

3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

### Partie I

Soient deux suites réelles à termes strictement positifs  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . On suppose que la série de terme général  $\alpha_n$  est convergente. On définit les suites  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par

$$U_n = \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right)^{1/n} \quad \text{et} \quad \gamma_n = \left(\prod_{k=1}^n \beta_k\right)^{-1/n}.$$

1. Montrer que

$$\frac{U_n}{\gamma_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \gamma_k.$$

**Indication:** on pourra utiliser un résultat de la **Partie 0**.

2. On fait l'hypothèse ici que la série de terme général  $\gamma_n/n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , est convergente. Soit  $\Gamma_k$  le reste de cette série, autrement-dit

$$\Gamma_k = \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n/n.$$

Montrer que

$$\sum_{k=1}^n U_k \leq \sum_{k=1}^n \Gamma_k \alpha_k \beta_k.$$

3. On fait le choix particulier de  $\beta_n$  suivant

$$\beta_n = (n + 1)^n / n^{n-1}.$$

- (a) Cette suite définit-elle une suite  $\gamma_n$  conforme à l'hypothèse faite à la question précédente?
- (b) Calculer  $\Gamma_k$ .

4. On s'intéresse à la série de terme général  $U_n$ .

- (a) Montrer que cette série est convergente.
- (b) Donner une majoration de sa somme en fonction de la somme de la série de terme général  $\alpha_n$ .

**Indication:** on pourra utiliser un résultat de la **Partie 0**.

## Partie II

Soit  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle qui vérifie

$$L_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n \geq 1, L_n^2 \leq L_{n+1}L_{n-1}. \quad (1)$$

- 1. Donner deux exemples de suites qui vérifient la propriété (1).
- 2. La suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle monotone?
- 3. Montrer que pour tout entier naturel  $k$  inférieur ou égal à  $n$ ,

$$L_k L_{n-k} \leq L_n.$$

4. On définit les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir de  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la manière suivante

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = L_n^{-1/n}, n \geq 1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_n = L_{n-1}/L_n, n \geq 1. \end{cases}$$

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_1, v_2, \dots$  et  $v_n$ .

5. Montrer que

(a)  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone,

(b)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.

6. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \leq (v_1 v_2 \dots v_n)^{1/n}$ .

7. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq v_n$ .

8. Etablir l'équivalence suivante

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ est convergente} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ est convergente} .$$

**Indication:** on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**.

### Partie III

Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est analytique dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si c'est une fonction développable en série entière au voisinage de tout point de  $\mathbb{R}$ . Autrement dit,  $f$  est analytique dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si pour tout point  $y$  de  $\mathbb{R}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $y$  et une suite réelle  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que

$$\forall x \in \mathcal{V} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - y)^n .$$

On admet qu'une fonction analytique dans  $\mathbb{R}$  est toujours de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose dans cette partie que la fonction  $f$  est analytique dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} .$$

2. Soit l'ensemble

$$R(f) = \{x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0\} .$$

Montrer que  $R(f)$  est à la fois une partie ouverte et fermée de  $\mathbb{R}$ .

3. En déduire que  $f$  satisfait la propriété suivante

$$R(f) \neq \phi \implies f \equiv 0. \quad (2)$$

### Partie IV

Soit  $L = (L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant (1). Toutes les fonctions  $f$  considérées dans cette partie sont supposées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ .

On définit l'ensemble de fonctions suivant:

$$E(L) = \{f \mid \exists \alpha > 0, \exists \beta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |f^{(n)}(x)| \leq \alpha \beta^n L_n\},$$

où les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent de  $f$ .

Dans les questions 1 à 3, on suppose que  $L_n = n!$ .

1. Montrer que cette suite  $(L_n)$  vérifie la propriété (1).

2. Montrer que

$$f \in E(L) \implies f \text{ est analytique.}$$

3. Montrer que

$$f \in E(L) \implies f \text{ vérifie (2).}$$

On revient au cas général où  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie (1).

4. Soient  $f$  et  $g$  de classe  $C^\infty$  dans  $E(L)$ . Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = f(\mu + \sigma x),$$

avec  $\mu$  et  $\sigma$  deux réels. Montrer que les fonctions suivantes sont aussi éléments de  $E(L)$

(a)  $f + g$ ,

(b)  $fg$ ,

(c)  $h$ .

**Indication:** on pourra utiliser les résultats de la **Partie II**.

5. On définit le support de  $f$  comme l'adhérence du complémentaire de  $R(f)$ . On suppose que  $E(L)$  vérifie l'implication suivante

$$\forall f \in E(L), R(f) \neq \emptyset \implies f \equiv 0.$$

Montrer que si la fonction  $f$  est à support compact, alors elle est identiquement nulle.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

*Dans toute cette épreuve,  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels.*

**Exercice n° 1**

1. Pour tout entier  $n$  strictement positif, la suite  $(\alpha_n)$  est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} - \alpha_n), \alpha_1 = 1, \text{ et } \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Exprimer  $\alpha_n$  en fonction de  $n$  et calculer sa limite, si elle existe.

2. Pour tout entier  $n$ , on définit la suite réelle  $(x_n)$ , récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}}$$

On donne  $x_0 = 1$  et  $x_1 = 2$ .

Donner l'expression du terme général  $x_n$  de la suite.

3. Déterminer la limite (si elle existe) de  $x_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .



### Exercice n° 2

1. Montrer l'existence d'une fonction  $\varphi$  définie implicitement par la relation  $\text{Arctg}(x - y) + 1 = e^{x+y}$  au voisinage de  $(0,0)$ .
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 pour  $y = \phi(x)$  au voisinage de 0.

### Exercice n° 3

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx$

2.  $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

3.  $\int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln(x) dx$  (on donnera le résultat sous la forme  $p \ln 2 + q \ln 3$ , où  $p$  et  $q$  sont des nombres rationnels)

### Exercice n° 4

Une entreprise produit des biens A, B et C. La production de ces biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés pour chaque unité produite sont donnés dans le tableau suivant :

	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Machine 4	Profit
A	1	3	1	2	5
B	6	1	3	3	5
C	3	3	2	4	5

Les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont respectivement de 84, 42, 21 et 42.

Déterminer la quantité de biens à produire pour maximiser le profit.

### Exercice n° 5

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice triangulaire  $T$  semblable à  $A$ .
2. Calculer  $A^n$  pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2.

### Exercice n° 6

Soit le polynôme  $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$ .

Calculer  $P(-1)$ ,  $P(1)$  et  $P(2)$ , puis montrer que  $P(X)$  est irréductible dans  $Z[X]$  (ensemble des polynômes de la variable  $X$  à coefficients entiers).

### Exercice n° 7

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. On pose  $Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y$ , où  $\alpha$  est un nombre réel compris entre 0 et 1.

1. On suppose que  $X$  (respectivement  $Y$ ) suit une loi normale de moyenne  $m_1$  (resp.  $m_2$ ) et d'écart type  $\sigma_1$  (resp.  $\sigma_2$ ) et que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. Déterminer la loi de  $Z$ .
2. On ne suppose pas de lois a priori sur  $X$  et  $Y$ , ni qu'elles sont indépendantes, mais on suppose toutefois qu'elles admettent des moments d'ordre 1 et 2 et vérifient :  $Var(X - Y) > 0$   
 $Var$  désigne la variance.

Déterminer  $\alpha$  de façon que la variance de  $Z$  soit minimale.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Le candidat résumera en 200 mots (réduction au 1/10<sup>ème</sup>) le texte suivant « L'Afrique face au défi de l'Etat multinational » extrait d'un article de Mwayila TSHIYEMBE paru dans « *Le Monde Diplomatique* » en septembre 2000.**

**Il n'oubliera pas de préciser le nombre de mots utilisés à la fin de sa copie.**

**L'Afrique face au défi de l'Etat multinational**

Etats-Unis d'Afrique » : le grand rêve, caressé depuis les premiers jours du panafricanisme, affleure dans les débats de toutes les instances communautaires africaines. Pour de nombreux responsables politiques, la faillite de l'Etat postcolonial constitue l'épicentre de la marginalisation du continent et la cause de la recrudescence de la violence, qui plonge des pans entiers de l'Afrique dans le chaos. Cette faillite serait aussi à l'origine de la misère exponentielle qui menace la survie de dizaines de millions d'individus, détruit ce qui reste de lien sociétal et laisse le champ libre aux redoutables pandémies du sida et de la malaria, tandis que les cadres sont au chômage, expatriés ou parqués dans une fonction publique en banqueroute, réduisant en poussière les savoirs conquis de haute lutte à l'école occidentale...

Mais ceux qui dressent ce sombre diagnostic posent rarement la question d'un nouveau modèle d'Etat, inspiré des traditions africaines, condition impérieuse d'une sortie de la crise, et seul capable de répondre aux défis de la mondialisation. Sans un tel renouveau, le projet d'Etats-Unis d'Afrique risque de demeurer une coquille vide ; et il n'y aura sur le continent ni authentique Etat de droit, ni développement durable, pas plus qu'un réveil des intelligences et un rassemblement des dévouements qui font si cruellement défaut.

En effet, la faillite de l'Etat postcolonial traduit une mise en cause du « vouloir vivre ensemble », une crise de sens et de dessein. Il existe un désaccord abyssal entre les nations (ou ethnies) et les citoyens, sur les valeurs fondamentales de la collectivité : définition d'une société de liberté, d'un pouvoir réellement consenti et partagé, d'un droit perçu comme naturel. L'articulation entre Etat et société apparaît conflictuelle depuis que les sociétés plurinationales n'ont survécu à l'anéantissement de leur modèle d'Etat que pour être soumises à une caricature de celui de l'Occident.

En dépit de la domination coloniale, qui a rompu la dynamique de leur construction étatique, la nature des sociétés africaines demeure plurinationale. Les nations précoloniales - qui furent les marqueurs identitaires de ces Etats multinationaux - survécurent malgré leur morcellement et leur fréquent éparpillement sur plusieurs Etats. Cependant, cette situation ne constitue pas un obstacle rédhibitoire à la reconstruction d'un lien sociétal. Car la crise de l'Etat-nation entraîne une conséquence inattendue : la libération du concept de nation de l'emprise du droit et de la mystique révolutionnaire. L'implosion de l'Union soviétique et de l'ex-Yougoslavie, la séparation de la Tchéquie et de la Slovaquie, le génocide des Tutsis et le chaos somalien en font foi.

Désormais, on peut distinguer la nation juridique, « l'Etat », et la nation sociologique, dite « ethnie ». Cette dernière procède à la fois d'une communauté de caractères (langue, lien de sang, religion, histoire commune) et d'une volonté de vivre ensemble attestée. Elle représente le soubassement de la nationalité d'origine, dont l'Etat postcolonial se limite à constater l'existence - dépourvu qu'il est de la mémoire historique et administrative des hommes et pays juxtaposés par la seule volonté coloniale.

Réhabiliter ces « nations » permet de mettre fin à la crise de conscience nationale et aux conflits d'identités qui violentent l'Afrique, mais aussi d'empêcher la manipulation politique de la contes tation de la nationalité, par exemple pour écarter la communauté banya mulengue à l'est du Congo-Kinshasa, l'ancien président Kenneth Kaunda en Zambie ou l'ancien premier ministre Alassane Ouattara en Côte-d'Ivoire. Si l'Etat multinational était instauré, la loi stipulerait partout que la nationalité se définit par la conscience et le statut d'appartenance à une communauté de caractères (Akan, Mosi, Bamileke), et la citoyenneté par la conscience et le statut d'appartenance à un Etat (Côte-d'Ivoire, Burkina, Cameroun).

Cette « renaissance » de l'Etat peut s'ancrer dans l'africanité. Contrairement aux idées reçues, l'Afrique noire avait en effet, à l'instar de l'Europe, créé son propre modèle d'Etat multinational et de nation-ethnie, avec les empires d'Ethiopie, du Ghana, du Mali, du Songhay, du Noupé, d'Ifé, du Bénin, du Kanem-Bornou, du Congo, du Monomopata ou du Zimbabwe, qui remontent au Moyen Age africain. Dans ces sociétés, le politique avait précédé l'invention de l'Etat - alors que la théorie classique assimile la construction du politique à l'avènement de l'Etat-nation.

A l'opposé de l'Etat-nation, qui a le monopole de production du droit, la nature plurinationale des sociétés africaines les a poussées à inscrire dans l'acte de fondation de l'Etat multinational les deux espaces autonomes de production du droit : l'espace étatique (lieu de production du droit général) et l'espace national ou ethnique (lieu de production du droit particulier sur le foncier, la succession, l'état civil, etc.). L'individu baigne dans un véritable pluralisme juridique, selon qu'il est sollicité par l'un ou l'autre de ces deux espaces, en fonction des types d'activité qu'il y exerce et de statut qu'il y revendique.

Il importerait ainsi de sortir le droit africain de l'espace de non-droit, dit de « la coutume », où il a été relégué par le mimétisme hérité de la colonisation, en restaurant le pluralisme juridique. La charte africaine des droits de l'homme a certes voulu refléter cette spécificité en proposant la notion de « droit des peuples », mais sans en préciser le contenu. L'Etat postcolonial a ainsi conservé sa primauté souveraine, et des peuples se sont vu priver de leurs « *propres moyens de subsistance* » (au sens de l'article premier) : ainsi le peuple Ogoni du delta du Niger, zone pétrolière du Nigeria, ou le peuple Dioula de la Casamance en rébellion contre l'Etat sénégalais.

Par ailleurs, dans ce modèle d'Etat multinational, les droits des minorités ne sont pas opposables aux droits de la majorité, car l'acte de refondation du pacte républicain contient l'obligation faite à l'Etat et aux nations constitutives de respecter les principes de l'égalité et du droit à la différence, afin de réaliser un destin commun. En contrepartie, ces nations jouissent automatiquement de mêmes droits et devoirs relevant des « droits de fondation », notamment celui de parler sa langue, de pratiquer sa religion et sa culture, de jouir de sa nationalité, etc. Dès lors, la question des droits des minorités n'a aucun fondement politique dans un Etat multinational.

Ainsi se définit une sorte de fédéralisme intégral, qui distribue le pouvoir selon la logique d'une triple fédération des nations, des citoyens et des terroirs. Sa fonctionnalité repose sur le postulat que l'Etat est l'appareil de plusieurs nations, disséminées sur plusieurs terroirs. Dans ce sens, la rationalité de l'autorité et de l'action politique ne peut être efficace que si le pouvoir est attribué d'abord en fonction des nations et des citoyens, ensuite des territoires. Si bien que les chefferies, les communes et les provinces autonomes n'ont de signification politique que pour autant qu'elles constituent le berceau des nations et des citoyens en cause, fondateurs de l'ordre politique.

Innovation majeure du fédéralisme intégral, la transformation de ces collectivités infra-étatiques en espaces politiques de cogestion conduit à brasser, dans le même destin, des peuples différents, évitant ainsi toute « purification ethnique ». Alors que le fédéralisme territorial de l'Etat-nation se fonde sur le postulat que, la nation étant une et indivisible, l'autorité politique ne peut s'y exercer efficacement que si elle touche l'ensemble du territoire sur lequel s'éparpille la population, dans le fédéralisme intégral, chemin faisant, le pouvoir doit être organisé en fonction du découpage politique du territoire : en cantons, communes, Etat fédéré, etc.

### **Au-delà du terroir**

La fédération des terroirs suggère l'idée de dépassement de ce concept européen de « territoire », et l'investissement dans le concept africain de l'espace, pensé comme cadre de vie, tissé des réseaux, des flux d'échanges et des lieux de mémoire attachant les êtres humains à leur sol et à leur environnement. Dans nombre de cas, il n'y a d'ailleurs pas de corrélation entre l'espace politique et l'espace socioculturel. Un nouveau pacte social est indispensable pour fonder l'Etat multinational sur le double consentement des nations et des citoyens, réconciliant ainsi la citoyenneté (individualisme) et la multinationalité (communautarisme) comme deux pôles de légitimation.

Il s'agit d'un principe de multinationalité qui se définit comme l'espace politique de fondation et de médiation d'un nouveau pacte démocratique, liant juridiquement chacune des nations et l'Etat, par un strict respect de l'égalité et du droit à la différence, en vue de bâtir un destin commun. Elle représente une autre façon de vivre l'Etat, lorsque l'unité politique ne se confond pas avec l'unité nationale.

Ainsi définie, la multinationalité met deux principes en mouvement : d'une part, le principe de la double représentativité des nations et des citoyens en tant qu'entités distinctes ; d'autre part, le principe de divisibilité de la souveraineté ou souveraineté partagée, ce partage se réalisant au profit soit des nations et des citoyens sur le plan interne, soit des Etats souverains sur le plan externe - comme avec l'intégration économique et politique dans l'Union européenne actuellement, dans la Communauté des Etats d'Afrique de l'Ouest (Cedeao) ou, demain, des Etats d'Afrique australe.

De nouveaux droits politiques s'attachent à la multinationalité : droit à l'existence, au vote, à la résistance à l'oppression, à la terre ancestrale, au partage des richesses, etc. Il s'agit d'une « républicanisation » du pouvoir traditionnel, qui réconcilie la tradition avec la modernité à travers une série de mécanismes : réhabilitation de la chefferie (gouvernement et assemblée), désignée comme première collectivité locale au-dessus de laquelle se trouvent la commune et la région autonomes, attribution à la chefferie de compétences en matière d'état civil, de santé primaire, d'éducation de base, de développement rural, consécration du droit de vote des nations afin qu'elles désignent leurs propres représentants dans les assemblées bicamérales, au niveau communal, régional et fédéral.

Exercent ce droit de vote des mandataires librement désignés par chaque communauté villageoise, parmi les socioprofessionnels, appelés grands électeurs, à travers un collège spécifique. Les partis politiques ne détiennent donc plus le monopole de l'activité politique, et le gouvernement de la chefferie peut solliciter la compétence de tout citoyen. Cette rénovation ne remet en cause ni les frontières internes et externes de l'Etat ni la balkanisation des nations opérée par la conférence de Berlin (1878).

A la différence de l'Etat-nation, l'Etat multinational ne s'approprie pas les citoyens, qui, là, suscitent l'Etat, désignent et destituent les gouvernants selon les règles communément acceptées. Partant de l'inversion de cette relation dialectique, la citoyenneté est à polarisation variable. Elle est une dans l'Etat multinational fédéral, double dans l'Etat multinational confédéral où elle remplace la classique double nationalité. La citoyenneté de l'Union européenne, telle que définie dans l'article 8 du traité de Maastricht, va dans ce sens.

En rupture radicale avec l'approche classique, la Constitution fondée sur les peuples - « démotique » ou pluraliste - renouvelle l'infrastructure juridique en prenant en compte le pluralisme de la société par-delà le multipartisme : elle restitue aux différentes composantes des sociétés hétérogènes leur statut de peuples ou nations, comme réalité juridique et politique distincte de l'Etat multinational. Bien que corsetées dans les entités politiques taillées par la seule volonté coloniale, les populations composites continuent inlassablement de témoigner d'elles-mêmes. Loin de se manifester comme un corps unifié et homogénéisé dans une nation étatique chimérique, elles traduisent plutôt une diversité des nations sociologiques à la recherche de l'Etat de tous les peuples, sinon de toutes les nations (Akans, Bambaras, Bamilékés, Dioulas, Fangs, Haussas, Peuls, Mandingues, Ibos, Hutus, Lubas, Lundas, Kikuyus, Kongos, Mboshis, Mosis, Ovimbundus, Saras, Shonas, Tutsis, Touaregs, Yorubas, Vilis, Wolofs, Zulus, Xhosas, etc.).

Dans cette perspective, la constitution de l'Etat multinational n'a pas seulement pour objet de donner un statut au pouvoir et au citoyen (*lire encadré ci-dessous*). Elle offre surtout un statut politique et juridique aux nations sociologiques ou ethnies, afin de fonder leur droit inaliénable à la légitimation de l'Etat et à l'exercice du pouvoir au même titre que les citoyens.

En ce sens, la Constitution fondera - pour la première fois dans l'Afrique post coloniale - le statut juridique d'un Etat compatible par sa nature démocratique, son droit, son histoire, sa culture, avec les logiques sociales des sociétés plurinationales qui lui donnent corps et signification (...).

MWAYILA TSHIYEMBE

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE  
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE  
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**CALCUL NUMÉRIQUE**

**(Durée de l'épreuve : 2 heures)**

**Exercice**

Soit  $A$  dans l'ensemble  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  des matrices carrées d'ordre 3 à éléments complexes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .
2. Donner une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telle que  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ .
3. Calculer  $A^9$ .

**Problème**

*I. Polynômes d'interpolation de Lagrange*

Soient  $x_0, \dots, x_n$  des réels distincts et  $f_0, \dots, f_n$  des éléments de  $\mathbb{R}$ . Soient les polynômes à coefficients réels

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k - x_j)}, \quad k = 0, \dots, n, x \in \mathbb{R},$$

et

$$L(x) = \sum_{k=0}^n f_k L_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



1. Calculer  $L_k(x_\ell)$  pour toutes les valeurs de  $k$  et  $\ell$  dans  $\{0, \dots, n\}$ .
2. Calculer  $L(x_\ell)$  pour tout  $\ell$  dans  $\{0, \dots, n\}$ . Quel est le degré maximal du polynôme  $L(x)$  ?
3. Montrer que  $L(x)$  est l'unique polynôme ayant les propriétés de la question 2.  
Il s'agit du *polynôme d'interpolation de Lagrange*.

## II. Intégration numérique

Soit  $[a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle *procédé d'intégration numérique* associé aux points  $x_0, \dots, x_n$  de  $[a, b]$  et aux poids  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  l'application

$$f \mapsto I(f) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k).$$

On veut étudier la qualité de l'approximation de  $\int_a^b f(x)dx$  par  $I(f)$  en la caractérisant par l'erreur d'approximation

$$E(f) = I(f) - \int_a^b f(x)dx.$$

1. On suppose que le procédé  $I$  est exact sur les polynômes de degré au plus  $n$ , c'est-à-dire que

$$E(P) = 0,$$

pour tout polynôme  $P$  à coefficients réels, de degré au plus  $n$ .

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{(n+1)}$ .

- a) Ecrire le développement de Taylor à l'ordre  $n$  de  $f(x)$  en  $a$ , avec reste intégral.  
Montrer que le reste intégral peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) G_t(x) dt, \text{ avec } G_t(x) = (x-t)_+^n = \max\{0, (x-t)^n\}.$$

- b) Montrer que

$$E(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) K_n(t) dt,$$

avec  $K_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dit *noyau de Peano*, donné par

$$K_n(t) = E(G_t).$$

- c) En déduire une majoration simple de  $E(f)$  en fonction de la norme uniforme de  $f^{(n+1)} : \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$ .
- d) Si  $g(x) = x^{n+1}$ , appliquer les questions précédentes pour calculer  $E(g)$  en fonction de  $K_n$ .  
On suppose  $K_n$  de signe constant. Exprimer la majoration précédente de  $E(f)$  en fonction de  $E(g)$ .

2. On veut décrire des procédés d'intégration numérique aux cas où les points d'interpolation sont également répartis sur  $[a, b]$  :  $x_k = a + (b - a) \cdot k/n$ ,  $k \in \{0, \dots, n\}$ .
- a) Trouver les constantes  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, \dots, n$  telles que le procédé

$$f \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k),$$

est exact pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . On pourra utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$  aux points  $x_0, \dots, x_n$  (c'est-à-dire  $f_0 = f(x_0), \dots, f_n = f(x_n)$ ). (Ne pas chercher une forme explicite de ces coefficients).

Montrer l'unicité de ces coefficients.

- b) Calculer le noyau de Peano pour  $n = 1$ .

En déduire un procédé d'intégration numérique et l'erreur d'approximation associée si  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ .

### III. Méthode de Gauss

Soit  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes de degré  $n$  orthonormés sur  $[a, b]$  :

$$\int_a^b P_n(u) P_m(u) du = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Démontrer que  $P_{n+1}$  et  $S$  sont orthogonaux, pour tout polynôme  $S$  de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et notons  $u_0, \dots, u_n$  les zéros de  $P_{n+1}$  :  $P_{n+1}(u) = \gamma_{n+1}(u - u_0) \dots (u - u_n)$ , avec  $\gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$ .

Soit  $Q$  un polynôme de degré  $2n + 1$ .

- Ecrire le polynôme  $L$  d'interpolation de Lagrange de  $Q$  aux points  $u_0, \dots, u_n$ .
- Montrer que le polynôme  $Q - L$  est divisible par  $P_{n+1}$ . En déduire qu'il existe des réels  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\int_a^b Q(u) du = \sum_{k=0}^n \lambda_k Q(u_k).$$

- Démontrer que  $\lambda_k > 0$ , pour tout  $k$  de 0 à  $n$ .